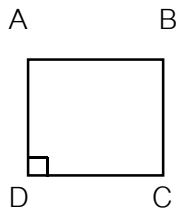


บทที่ 3

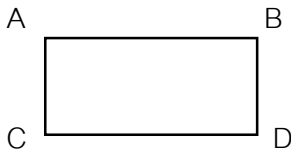
การหาพื้นที่

การหาพื้นที่แต่เดิมเคยหากันแต่พื้นที่นาเป็นส่วนมาก พื้นที่อย่างอื่นไม่ค่อยได้คิดกันมากนัก จึงนิยมเรียกเลขคณิตวิธีนี้ว่า เลขเสนา และมักเรียกคู่กันไปกับวิธีหาหน้าไม้ว่า “เลขเสนาหน้าไม้” (“เสนา” แต่ได้เลื่อนมาเป็น “เสนา”) ตามปกติพื้นที่นามักเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปอย่างอื่นมีน้อย ในสมัยนั้นนอกจากพื้นที่นาแล้ว ยังมีพื้นที่อื่นๆ ที่มีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากอีกเป็นอันมาก เช่น พื้นที่สวน, พื้นที่ไร่, พื้นที่สนาม, พื้นที่ถนน, พื้นที่เพดาน, พื้นที่ฝาผนังห้อง เป็นต้น ถ้าเข้าใจวิธีหาพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากธรรมดาได้แล้ว ก็สามารถหาพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากอื่นได้ทั่วไป

1. พื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก สี่เหลี่ยมมุมฉากได้แก่ สี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันและมีมุมเป็นมุมฉากทุกมุม เดิมนิยมเรียกสี่เหลี่ยมมุมฉากมากกว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพราะมีรูปคล้ายผืนผ้า แต่ถ้าหากด้านกว้างและด้านยาวเท่ากันทั้งสี่ด้าน จะเรียกว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัส



สี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านเท่ากันทุกด้าน และมีมุมฉากทั้งสี่มุม



สี่เหลี่ยมมุมฉากหรือสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีด้านกว้างและด้านยาวยาวไม่เท่ากัน แต่ต้องมีมุมเป็นมุมฉากทั้งสี่มุม

สูตรสำหรับหาพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก

พื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก = กว้าง x ยาว

พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส = (ด้าน)²

เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = 2 (กว้าง x ยาว)

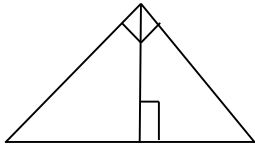
เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = 4 x ด้าน

พื้นที่ที่หา จะต้องเอาขนาดกว้างกับยาว ที่มีหน่วยเดียวกันคูณกัน เช่น ฟุต, หลา, เมตร จะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นตารางฟุต, ตารางหลา, ตารางเมตร ตามลำดับด้วย

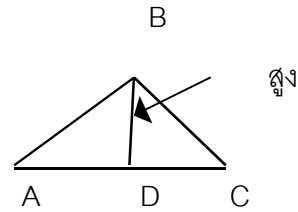
2. พื้นที่สามเหลี่ยม สามเหลี่ยมได้แก่ รูปเหลี่ยมราบที่ล้อมรอบไปด้วยเส้นตรง 3 ด้าน, และมีมุม 3 มุม (คือสามเหลี่ยมนั่นเอง) จึงได้เรียกว่า รูปสามเหลี่ยม จะกำหนดให้ด้านใดด้านหนึ่งเป็นฐานก็ได้ เส้นตรงที่ลากจากมุมยอด มาตั้งได้ฉากกับฐาน เรียกว่า “เส้นสูง” และผลบวกของด้านทั้งสามเรียกว่าเส้นรอบรูป

สูตรสำหรับหาพื้นที่สามเหลี่ยม

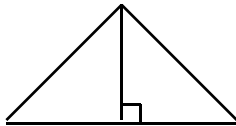
$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$



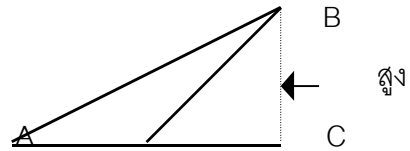
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว



สามเหลี่ยมธรรมดา



สามเหลี่ยมมุมฉาก



สามเหลี่ยมเอน

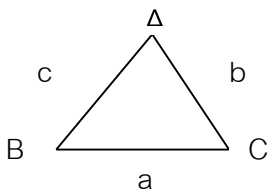
3. พื้นที่สามเหลี่ยมใดๆ และสี่เหลี่ยมใดๆ

3.1 สามเหลี่ยมใด ๆ คือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านไม่เท่ากันทั้งสามด้าน การหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมใดๆ กับสามเหลี่ยมมุมฉากนั้นคือ

$$\text{พื้นที่ } \Delta = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

$$\text{พื้นที่ } \Delta \text{ มุมฉาก} = \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของด้านประกอบมุมฉาก}$$

การหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมนั้น ไม่ว่าสามเหลี่ยมจะมีรูปร่างเป็นอย่างไรก็ตาม เมื่อโจทย์กำหนดหรือเมื่อเราทราบความยาวของด้านทั้งสามแล้ว เราจะหาพื้นที่ได้โดยใช้สูตร



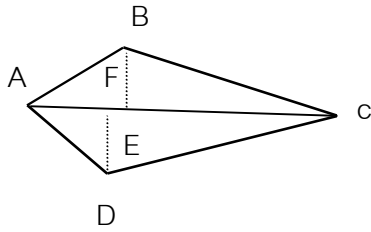
$$\text{พื้นที่ } \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ในเมื่อ a, b, c เป็นความยาวของด้านสามเหลี่ยมของรูปสามเหลี่ยม

$$\text{และ } S = \frac{1}{2} \times (a + b + c)$$

3.2 สี่เหลี่ยมใด ๆ คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านไม่เท่ากันทั้ง 4 ด้านหรือเท่ากันเป็นบางด้านจะหาได้

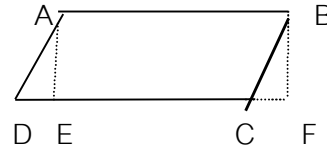
จากสูตร



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่} \square \text{ใด} &= \frac{1}{2} \times \text{เส้นทแยงมุมเส้นหนึ่ง} \times \text{ผลบวกของเส้นตั้งฉาก (เส้นกึ่ง)} \\ \text{หรือ} &= \frac{1}{2} \times AC \times (BE + DF) \end{aligned}$$

4. พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน สี่เหลี่ยมด้านขนานได้แก่รูปที่ล้อมรอบไปด้วยด้านอันเป็นเส้นตรง 4 ด้าน มีด้านที่อยู่ตรงข้ามยาวเท่ากันและขนานกัน ผิดกันกับสี่เหลี่ยมมุมฉาก กล่าวคือรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีมุมเป็นมุมฉากทุกมุม ส่วนมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่เป็นมุมฉาก แต่มุมตรงกันข้ามเท่ากันทั้งสองมุม

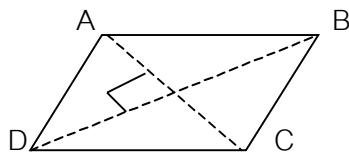
จะกำหนดให้ด้านใดด้านหนึ่งเป็น ฐาน ก็ได้ เส้นตรงที่ลากจาก ด้านที่ขนานกับฐานมาตั้งได้ฉากกับฐานเรียกว่า “เส้นสูง”



สูตรการหาพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ.-

$$\text{พื้นที่} = \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

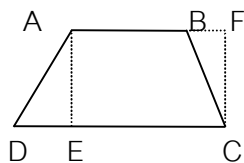
เมื่อสี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านเท่ากันทั้งสี่ด้าน แต่ไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก เรียกว่า สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนนี้ เส้นทแยงมุมทั้งสองต่างก็แบ่งครึ่งกันเป็นมุมฉาก



สูตรมีดังนี้

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของเส้นทแยงมุมทั้งสอง}$$

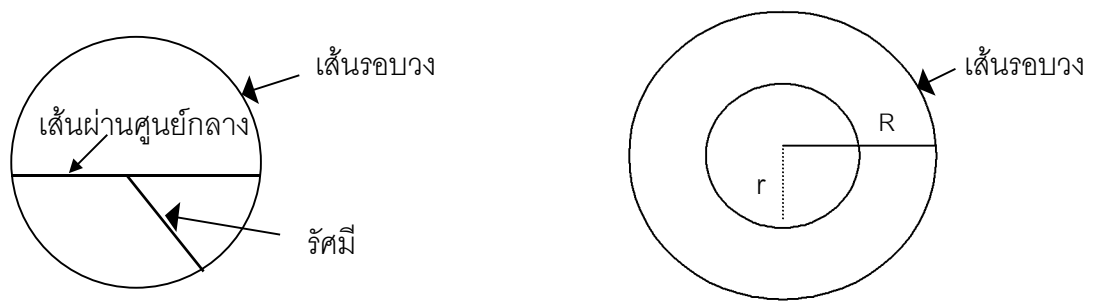
5. พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู สี่เหลี่ยมคางหมูคือสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันคู่หนึ่ง ส่วนด้านตรงข้ามอีกคู่หนึ่ง ไม่ขนานกัน ด้านและมุมทั้งสี่ไม่เท่ากันเลย การที่เราเรียกเช่นนี้ เพราะมีรูปร่างคล้ายคางหมู



การหาพื้นที่คงใช้สูตร

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่} &= \frac{1}{2} \times \text{สูง} \times \text{ผลบวกด้านคู่ขนาน} \\ &= \frac{1}{2} \times AE \times (AB + DC) \end{aligned}$$

6. พื้นที่วงกลมและวงแหวนก่อนจะศึกษาเรื่องวงกลมควรได้ศึกษาสิ่งที่ควรรู้เกี่ยวกับวงแหวนก่อน



6.1 เส้นรอบวง คือ ส่วนโค้งที่ล้อมรอบวงกลม กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ เส้นรอบรูปของวงกลม

6.2 จุดศูนย์กลาง คือ จุดที่อยู่กึ่งกลาง ภายในวงกลม ซึ่งมีระยะห่างจากเส้นรอบวงเท่า ๆ กันในการเขียนรูปวงกลม ต้องหาจุดศูนย์กลางก่อนเสมอ

6.3 รัศมี คือ เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลาง ไปยังเส้นรอบวง รัศมีของวงกลมใดวงกลมหนึ่งย่อมยาวเท่ากันเสมอ

6.4 เส้นผ่านศูนย์กลาง คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง ปลายทั้งสองข้างจรดเส้นรอบวงและยาวเป็นสองเท่า ของรัศมี กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ รัศมียาวเป็นครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลาง

6.5 พื้นที่วงแหวน เมื่อมีวงกลมสองวงซ้อนกัน โดยมีจุดศูนย์กลางรวมเป็นจุดเดียวกัน วงกลมวงนอกเป็นวงกลมใหญ่ วงกลมในเป็นวงกลมวงเล็ก พื้นที่ระหว่างวงกลมทั้งสองเรียกพื้นที่วงแหวน

เมื่อได้วัดตรวจสอบวงกลมขนาดต่างๆ ดูแล้วคงปรากฏว่า ส่วนยาวของเส้นรอบวงและเส้นผ่านศูนย์กลาง เมื่อเปรียบเทียบกับกันดูย่อมได้อัตราส่วนดังนี้.-

$$\begin{aligned}\text{เส้นรอบวง/เส้นผ่านศูนย์กลาง} &= 3 \frac{1}{7} \text{ (ประมาณ)*} \\ &= \frac{22}{7} * \\ &= 3.1428575*\end{aligned}$$

$$= \pi \text{ (อ่านว่า "พาย")}$$

$$\therefore \text{เส้นรอบวง} = \pi \times \text{เส้นผ่านศูนย์กลาง} = \pi D$$

$$= 2 \pi \times \text{รัศมี}$$

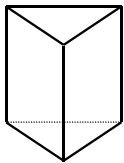
$$\text{หรือเขียนทั่วไป} = 2 \pi r$$

$$\text{พื้นที่ของวงกลม} = \pi r^2$$

$$\text{พื้นที่วงแหวน} = \text{พื้นที่วงใหญ่} - \text{พื้นที่วงเล็ก} = \pi (R^2 - r^2)$$

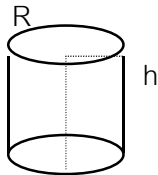
7. **พื้นที่ของรูปปริซึม** รูปปริซึม ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมตันที่มีด้านตรงข้ามสองด้านยาวเท่ากันและขนานกัน ด้านที่เหลืออื่น ๆ ต่างก็ประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ปลายทั้งสองข้างอาจเป็นรูปสามเหลี่ยม, สี่เหลี่ยมก็ได้

การหาพื้นที่ ก็ให้พื้นที่ผิวรอบ ๆ หลายรูปมารวมกันเรียกว่า พื้นที่ผิวข้าง และหาพื้นที่ปลายทั้งสองข้างมารวมกันเข้าด้วยกัน เป็นพื้นที่ผิวนอกทั้งหมด



$$\begin{aligned} \text{สูตร} \quad \text{พื้นที่ผิวข้าง} &= \text{เส้นรอบรูปของฐาน} \times \text{ส่วนสูง} \\ \text{พื้นที่ผิวทั้งหมด} &= \text{พื้นที่ผิวข้าง} + \text{พื้นที่ปลายทั้งสองข้าง} \end{aligned}$$

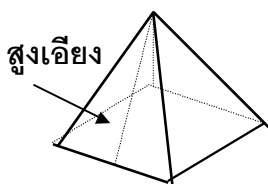
8. **พื้นที่รูปทรงกระบอก (Cylinder)** รูปทรงกระบอกได้แก่ รูปที่เกิดขึ้นจากการหมุนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากล้อมรอบแกนเข้าหากัน ปลายทั้งสองข้างของรูปทรงกระบอกเป็นรูปวงกลม อนึ่งถ้าจะเรียกว่ารูปทรงกระบอกตันว่า รูปปริซึม ซึ่งมีฐานเป็นวงกลมก็ได้



$$\begin{aligned} \text{สูตรในการหาพื้นที่ผิว} \\ \text{พื้นที่ผิว} &= \text{พื้นที่ผิวโค้ง} + \text{พื้นที่ปลายทั้งสองข้าง} \end{aligned}$$

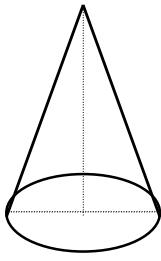
$$\begin{aligned} &= 2 \pi Rh^2 + 2 \pi R^2 \\ &= 2 \pi R(h + R) \end{aligned}$$

9. **พื้นที่รูปปิรามิด (Pyramid)** รูปปิรามิด ได้แก่ รูปตันซึ่งมีฐานเป็นสี่เหลี่ยมราบและแหลมเรียว เป็นรูปสามเหลี่ยม ไปพบกันที่มุมยอดจุดเดียว



$$\begin{aligned} \text{สูตรการหาพื้นที่} \\ \text{พื้นที่ผิว} &= \text{พื้นที่ผิวเอียง} + \text{พื้นที่ฐาน} \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \text{เส้นรอบรูปฐาน} \times \text{ส่วนสูงเอียง} \right) + \text{พื้นที่ฐาน} \end{aligned}$$

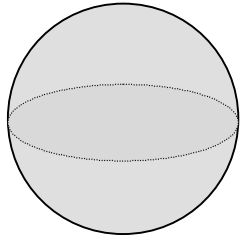
10. **พื้นที่รูปกรวยกลม (Cone)** รูปกรวยกลมได้แก่ รูปตัน ซึ่งมีฐานเป็นรูปกลมและแหลมเรียวโดยลำดับ ไปพบกันที่มุมยอดจุดเดียว เกิดจากการหมุนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ล้อมรอบด้านตั้งฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนั้นเข้าหากัน



สูตรการหาพื้นที่

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ผิว} &= \text{พื้นที่ผิวเอียง} + \text{พื้นที่ฐาน} \\
 &= \pi R h + \pi R^2 \\
 &= \pi R (h + R)
 \end{aligned}$$

11. **รูปทรงกลมตัน (Sphere)** รูปทรงกลมตัน ได้แก่ รูปตันที่เกิด ขึ้นด้วยการหมุนครึ่งวงกลมเข้าหาเส้นผ่านศูนย์กลาง ซึ่งคงที่อยู่เสมอ, ผิวโค้ง (Curved Surface) ของรูปทรงกลมตัน ย่อมห่างจากจุดภายในรูปหนึ่งอันเรียกว่าจุดศูนย์กลาง ไปยังผิวโค้ง ก็ย่อมยาวเท่ากันกับทุกๆ เส้นด้วย



สูตร การหาพื้นที่ผิวโค้ง

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ผิวโค้ง} &= 4 \times \text{พื้นที่ฐาน} \\
 &= 4 \times \pi R^2 \\
 &= 4 \pi R^2
 \end{aligned}$$
