

บทที่ 7 การถอดกรณฑ์

7.1 การหารากกำลังที่ 2 ($\sqrt{\quad}$)

7.1.1) คำจำกัดความ

รากกำลังที่สองของเลขจำนวนใด หมายความว่าเมื่อเราคูณตัวเองได้ผลคูณเท่ากับเลขจำนวนเดิม เช่น 4 เป็นรากกำลังที่สองของเลข 16 เพราะ 4 คูณตัวเองได้ผลคูณเป็น 16 เป็นต้น ในภาษาอังกฤษเรียกว่า ROOT

เครื่องหมายรากเขียนดังนี้ คือ $\sqrt{\quad}$ ดังนั้นรากกำลังที่สองของ 16 จึงเขียนเป็น $\sqrt{16}$ คำว่ารากเป็นภาษาไทยเดิมเรียกว่ากรณฑ์ ตรงกับภาษาอังกฤษว่ารูต (ROOT) บางคราวก็เรียกว่า รูต

การอ่าน $\sqrt{16}$ อ่านว่ารากกำลังที่สองของ 16 หรือจะอ่านว่า รูตที่สองของ 16 ก็ได้ ที่ถูกต้องเขียนเลข 2 ไว้ด้วย เช่น $\sqrt[2]{\quad}$ เพื่อให้รู้ว่าเป็นรูตที่สอง แต่ถ้าเป็นเฉพาะรูตที่สองโดยมากไม่นิยมเขียนเพราะเป็นอันเข้าใจกันทั่วไป ส่วนรูตที่ 3 ขึ้นไป ต้องเขียนเลขกำกับไว้เสมอ เช่น $\sqrt[3]{\quad}$ ฯลฯ เป็นต้น

7.1.2) ราก กับการยกกำลัง

การหารากนั้นเป็นการหาค่าที่ตรงข้ามกับการยกกำลัง เช่น

1^2	=	1	รากที่สองของ 1	=	1
2^2	=	4	รากที่สองของ 4	=	2
3^2	=	9	รากที่สองของ 9	=	3
10^2	=	100	รากที่สองของ 100	=	10
100^2	=	10000	รากที่สองของ 10000	=	100

จะเห็นได้ว่าการหารากของจำนวนเลขที่มากกว่า 1 ได้ค่าลดลงส่วนการยกกำลังนั้นได้ค่าทวีขึ้น

การหารากย่อมหาได้ทั้งเลขจำนวนเต็ม, ทศนิยม และเศษส่วน อาจจะได้ลงตัว หรือเป็นเศษส่วนก็ได้

7.2 การหารากด้วยวิธีแยกตัวประกอบ

การหารากนั้น ถ้าเป็นเลขจำนวนน้อยให้ใช้วิธีแยกเลขจำนวนนั้นออกเป็นตัวประกอบ เลขตัวประกอบตัวใดเหมือนกันและซ้ำกัน 2 ตัว ก็แยกเอาออกมาเป็นผลลัพธ์เสียตัวหนึ่ง เช่น รากกำลังที่สองของ 9 แยกเป็นตัวประกอบได้ 3×3 จึงได้ราก เป็น 3 ตัวเดียว

เมื่อถอดรากได้เป็นเลขตัวประกอบหมายถึง เอารากเหล่านั้นมาคูณกันเข้าให้เป็นจำนวนเดียว จึงเป็นรากที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 7.2 จงหารากกำลังที่สองของ 36

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{รากกำลังที่สองของ } 36 &= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3} \\ &= 2 \times 3 = 6\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.2 จงหารากกำลังที่สองของ 225

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{รากกำลังที่สองของ } 225 &= \sqrt{3 \times 75} \\ &= \sqrt{3 \times 3 \times 25} \\ &= \sqrt{3 \times 3 \times 5 \times 5} \\ &= 3 \times 5 = 15\end{aligned}$$

7.3 การหารากอย่างวิธีตั้งหาร

7.3.1) กล่าวนำ

การหารากของเลขจำนวนมาก จะหาอย่างวิธีแยกตัวประกอบตามที่เรียนมาแล้วไม่สะดวก ใช้หาอย่างวิธีตั้งหารได้ผลเร็วกว่า แต่ต้องรู้ว่าเมื่อหารากออกแล้วจะได้เลขผลลัพธ์หลัก ขอให้สังเกตเลขดังนี้

1^2	=	1	เพราะฉะนั้น	$\sqrt{1}$	=	1
10^2	=	100	เพราะฉะนั้น	$\sqrt{100}$	=	10
100^2	=	10,000	เพราะฉะนั้น	$\sqrt{10,000}$	=	100
$1,000^2$	=	1,000,000	เพราะฉะนั้น	$\sqrt{1,000,000}$	=	1,000

ตามตัวเลขข้างบนนี้จะเห็นได้ว่า รากกำลังที่สองของจำนวนเลขที่อยู่ระหว่าง 1 และ 100 ได้ผลลัพธ์ 1 ตัว หรือ 1 หลัก รากกำลังที่สองของจำนวนเลขที่อยู่ระหว่าง 1,000 และ 10,000 ได้ผลลัพธ์ 2 ตัว หรือ 2 หลัก เพราะฉะนั้น เราสามารถกล่าวได้ว่า

รากกำลังที่สองของจำนวน 1 หลัก หรือ 2 หลัก ได้ผลลัพธ์เป็นเลข 1 หลัก

ส่วนของจำนวนเลข 3 และ 4 หลัก ได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลข 2 หลัก ฯลฯ

7.3.2) วิธีการถอดกรณฑ์ จำนวนเต็ม

จากข้อสรุป ในหัวข้อที่ 7.3.1 จะเห็นได้ชัดว่า ถ้าตัวตั้งมีเลข 2 หลัก ต้องได้ผลลัพธ์ 1 หลัก ถ้าตัวตั้งมีขึ้นอีก 1 หลัก ก็ได้ผลลัพธ์เพิ่มขึ้นอีก 1 หลัก เช่นเดียวกัน ตามปกติใช้วิธีนับจำนวนเลข ตัวตั้งจากหลักหน่วยไปทางซ้ายมือ นับ 2 หลัก ถอดหารากได้ 1 หลัก หากมีตัวเลขเพิ่มอีก 1 หลัก ก็ได้ผลลัพธ์เพิ่มขึ้นอีก 1 หลัก เป็น 3 หลัก เพื่อเป็นการป้องกันการหลงลืม มักใช้วิธีขีดหรือจุดไว้บนจำนวนเลขตัวตั้งเป็นสำคัญ เช่น 144, 1444, 56644 จะเขียนเป็น 144, 1444 และ 56644 เป็นต้น

ขั้นตอนการถอดกรณฑ์ จะมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

(7.3.2.1) จัดหมู่ โดยนับตัวเลขจากขวามือไปทางซ้าย 2 หลัก แล้วขีดไว้ 1 แห่ง จนหมด

(7.3.2.2) ขีดเส้นโครงเหมือนหารยาว

(7.3.2.3) หาตัวเลขที่คูณกับตัวของมันเองได้ไม่เกินหมู่แรก แล้วใส่ผลลัพธ์ไว้ด้านบน และด้านตัวหาร หากมีเศษ ให้หเศษลงมาบรรทัดต่อไป

(7.3.2.4) ชักเลขหมู่ต่อไปลงมาบรรทัดต่อไปทั้งหมด

(7.3.2.5) เอา 2 คูณผลลัพธ์ตัวแรก ได้เท่าไร เอามาใส่เป็นตัวหาร

(7.3.2.6) หาตัวเลขมาใส่ต่อจากผลลัพธ์ตัวแรก โดยตัวเลขนี้ เมื่อนำมาคูณกับผลลัพธ์ที่ตามด้วยตัวมันเอง จะต้องไม่เกินค่า ที่ดึงลงมาจากรบทัดบน

(7.3.2.7) ทำซ้ำในขั้นตอนที่ 7.3.2.5 – 7.3.2.6 จนครบทุกหมู่

(7.3.2.8) หากยังเหลือเศษ ขึ้นต่อไปต้องเป็นทศนิยม และเวลาชักเลขลงมาต้องชักศูนย์มาทีละ

คู่ และทำอย่างวิธีที่กล่าวมาแล้ว ไปจนได้ตำแหน่งทศนิยมที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 7.3 จงหารากกำลังที่สองของ 1444

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 3 \overline{) 1444} \\
 \underline{9} \\
 6 \overline{) 544} \\
 \underline{544} \\
 \hline \hline
 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 7.6 จงหารากกำลังที่สองของ 152.275

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\
 1 &) & 1 & 5 & 2 & 2 & 7 & 5 & 0 \\
 \hline
 & & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 \hline
 & & & 4 & & 4 & & & \\
 & 2 & 4 & 3 &) & 8 & 2 & 7 & \\
 \hline
 & & & & & 7 & 2 & 9 & \\
 & 2 & 4 & 6 & 4 &) & 9 & 8 & 5 & 0 \\
 \hline
 & & & & & & 9 & 8 & 5 & 6
 \end{array}
 \end{array}$$

∴ รากที่สองของ 152.275 คือ 12.34

7.3.4) การหารากของเศษส่วน

หารากทั้งตัวเลขและตัวส่วน เมื่อหารากได้ลงตัวได้ผลลัพธ์เป็นเลขเศษส่วน

เมื่อเป็นเศษส่วนจำนวนคละ ให้ทำเป็นเศษเกินแล้ว จึงหารากทั้งตัวเศษและตัวส่วน ครั้นแล้วจะทำให้เป็นเศษส่วนจำนวนคละอีก

ถ้าตัวส่วนเป็นเลขจำนวนน้อย ให้หาตัวเลขมาคูณทั้งเศษและตัวส่วน เพื่อให้หารากตัวส่วนได้ลงตัว ส่วนเศษที่หาไม่ลงตัว ให้หาอย่างหารากของทศนิยมตามที่กล่าวมาแล้ว ครั้นแล้ว จึงเอาตัวส่วนซึ่งเป็นจำนวนเต็มทีไปหาร ได้ผลลัพธ์เป็นทศนิยม

ถ้าเศษส่วนเป็นเลขจำนวนมาก ให้เอาตัวส่วนหารตัวเศษ ได้ผลลัพธ์เป็นทศนิยมก่อน แล้วจึงหา

รากของทศนิยมต่อไป เช่น

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{4}{9}} &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \\
 \sqrt{1\frac{7}{7}} &= \sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{2} = 1.414 \\
 \sqrt{\frac{2}{3}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{2.4494}{3} = 0.8164 \\
 \sqrt{4\frac{259}{372}} &= \sqrt{4.696236559....} = 2.16708
 \end{aligned}$$

7.4 การหารากกำลังที่สาม

รากกำลังที่สามเรียกภาษาอังกฤษว่า Cube root ซึ่งหมายความว่า เมื่อเอารากคุณตัวมันเอง 3 ครั้ง จะได้เท่ากับจำนวนเต็ม เช่น รากกำลังที่สามของ 27 คือ 3 เพราะ $3 \times 3 \times 3 = 27$ หรือเขียนได้ง่ายๆ ดังนี้ $3^3 = 27$ ฉะนั้น $\sqrt[3]{27} = 3$

7.4.1) การหารากด้วยวิธีแยกตัวประกอบ

การหารากกำลังที่สามนั้นหาได้ยากมาก ประกอบทั้งที่มีใช้น้อย ถ้าเป็นตัวเลขจำนวนน้อยใช้วิธีหาด้วยวิธีแยกตัวประกอบ คือ แยกจำนวนเลขออกเป็นตัวประกอบหลายตัว ถ้าเหมือนหรือซ้ำกัน 3 ตัว ให้ยกมาเป็นผลลัพธ์ 1 ตัว

ถ้าเป็นเลขเศษส่วน ให้ใช้วิธีหารากของตัวเศษและหารากของตัวส่วนได้รากทั้งหมดเสียเป็นเศษส่วน และถ้าเป็นเศษส่วนจำนวนคละ ให้ทำเป็นเศษส่วนเกินก่อนแล้วจึงหาราก

ตัวอย่างที่ 7.7 จหารากกำลังที่สาม ของ 125

วิธีทำ

$$125 = 5 \times 5 \times 5$$

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} = 5$$

7.4.2) การหารากด้วยวิธีตั้งหาร

การที่จะคิดหารากกำลังที่สามของจำนวนเลขได้ง่าย ควรสังเกต และจดจำเลขต่อไปนี้ก่อน

0^3	=	0		6^3	=	216
1^3	=	1		7^3	=	343
2^3	=	8		8^3	=	512
3^3	=	27		9^3	=	729
4^3	=	64		10^3	=	1,000
5^3	=	125				

ดังนั้นเลขจำนวนใดที่เลขตัวท้ายเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ย่อมหารากได้เลขตัวท้ายเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ตามลำดับ

สำหรับหลักของผลลัพธ์มักจะได้ผลคือ เลขที่อยู่ระหว่าง 1 - 1,000 ได้รากเพียง 1 หลัก ระหว่าง 1,000 - 1,000,000 จะได้ 2 หลัก และต่อไปก็ได้ผลว่าจำนวนเลขตัวตั้ง 3 หลัก ได้ราก 1 หลัก เสมอไป จงสังเกตเลขต่อไปนี้

1^3	=	1		$\sqrt[3]{1}$	=	1
10^3	=	1,000		$\sqrt[3]{1,000}$	=	10
100^3	=	1,000,000		$\sqrt[3]{1,000,000}$	=	100

ถ้าจำนวนเลขตัวตั้งเป็นเลขทศนิยม ให้คิดหาหลักของจำนวนก่อนแล้ว จึงหาหลักของตัวเลขที่เป็นทศนิยม และคิดหารากทั้งหมดพร้อมกัน

ตัวอย่างที่ 7.8 จงหารากกำลังที่สามของ 314432

วิธีทำ ต้องหาราก 2 หลักดังนี้ 314 432

60^3	314 432	$60 + 8$
	216 000	
$3 \times (60)^2 = 10,800$	98 432	
$3 \times 60 \times 8 = 1440$ +		
$(8)^2 = 64$		
$= 12,304$	98 432	

ผลลัพธ์ คือ $60 + 8 = 68$

หรือ

$$\begin{array}{rcl}
 300 \times 6^2 & = & 10,800 \\
 & & + \\
 30 \times 6 \times 8 & = & 1,440 \\
 & & + \\
 8^2 & = & \underline{64} \\
 \text{(ตัวหาร)} & \underline{12,304} & \text{ตอบ}
 \end{array}$$

คำอธิบาย ตัวตั้งมี 6 หลัก คิด 3 หลัก ได้ราก 1 หลัก จากหลักหน่วยไปทางซ้ายมือเห็นได้ชัดว่าต้องได้เป็นตัวเลข 2 หลัก

ผลลัพธ์ตัวแรกต้องได้ 60 เพราะ $(60)^3 = 216,000$ ให้เอา $(60)^2$ ไว้ที่ตัวหารและ 60 ไว้ทางผลลัพธ์ แล้วเอา 60 ไปคูณ จะได้ 216,000 ลบออกจากตัวตั้งเดิม คงเหลือ 98,432 ซึ่งถือเป็นตัวตั้งใหม่

การหาผลลัพธ์ตัวที่สอง หา 3 มาคูณ $(60)^2$ ได้ 10,800 เอาไปหาร 98,432 ต้องได้ผลลัพธ์ประมาณ 8 จึงเอามาเป็นผลลัพธ์ตัวที่สอง หา 3 มาคูณ (60×8) อีกได้ 1,440 และเอากำลังสองของผลลัพธ์ตัวที่ 2 คือ $(8)^2 = 64$ มารวมด้วยได้ตัวหารทั้งหมดเป็น 12,304 เอา 8 มาคูณได้ 98,432 ลงตัวพอดี