

บทที่ 8

การถอดกรณฑ์

1. การหารากกำลังที่ 2 ($\sqrt{\quad}$)

รากกำลังที่สองของเลขจำนวนใด ๆ (ที่เราถอดรากออกมาแล้ว) หมายความว่า เมื่อเราเอาเลขนั้นคูณตัวเองแล้ว จะได้ผลคูณเท่ากับเลขจำนวนเดิม (ที่ยังไม่ได้ถอดราก) เช่น 4 เป็นรากกำลังที่สองของเลข 16 (พอเอา 4 คูณตัวเอง ผลคูณที่ได้เป็น 16 เท่ากับจำนวนเดิม เป็นต้น) ในภาษาอังกฤษเรียกว่า ROOT

เครื่องหมายรากเขียนดังนี้ คือ $\sqrt{\quad}$ หรือ $\sqrt{\quad}$ ดังนั้นรากกำลังที่สองของ 16 จึงเขียนเป็น $\sqrt{16}$ คำว่ารากเป็นภาษาไทยเดิมเรียกว่ากรณฑ์ ตรงกับภาษาอังกฤษว่ารูท (ROOT) บางคราวก็เรียกว่า รุ้ต

การอ่าน $\sqrt{16}$ อ่านว่ารากกำลังที่สองของ 16 หรือจะอ่านว่า รุ้ตที่สองของ 16 ก็ได้ (ที่ถูกต้องเขียนเลข 2 ไว้ด้วย เช่น $\sqrt{2}$ เพื่อให้รู้ว่าเป็นรุ้ตที่สอง) เป็นเฉพาะรุ้ตที่สองโดยมากไม่นิยมเขียนเลข 2 เพราะเป็นอันเข้าใจกันทั่วไป ส่วนรุ้ตที่ 3 ขึ้นไป ต้องเขียนเลขกำกับไว้เสมอ เช่น $\sqrt[3]{4}$ ฯลฯ เป็นต้น

การหารากนั้นเป็นการหาตรงข้ามกับการยกกำลัง ข้อควรสังเกต

1^2	=	1		$\sqrt{1}$	=	1
2^2	=	4		$\sqrt{4}$	=	2
3^2	=	9		$\sqrt{9}$	=	3
10^2	=	100		$\sqrt{100}$	=	10
100^2	=	10,000		$\sqrt{10,000}$	=	100

จะเห็นได้ว่าการหารากของจำนวนเลขที่มากกว่า 1 ค่าที่ได้จะลดลง ส่วนการยกกำลังนั้นได้ค่าทวีขึ้น

การหาราก ย่อมหาได้ทั้งเลขจำนวนเต็ม, ทศนิยม และเศษส่วน ซึ่งจะลงตัว หรือเป็นเศษส่วนก็ได้

1.1 การหารากด้วยวิธีแยกตัวประกอบ - การหารากนั้น ถ้าเป็นเลขจำนวนน้อย ๆ ให้ใช้วิธีแยกตัวประกอบ เลขตัวประกอบตัวใดเหมือนกัน (ซ้ำกัน 2) ตัว ก็แยกเอาออกมาเป็นผลลัพธ์เสียตัวหนึ่ง เช่น รากกำลังที่สองของ 9 แยกเป็นตัวประกอบได้ 3×3 เลขเหมือนกันสองข้างเราเอาออกมาหนึ่งตัว เป็น 3 ตัวเดียว

เมื่อถอดรากได้เป็นเลขตัวประกอบหมายถึง เอารากเหล่านั้นมาคูณกันเข้าให้เป็นจำนวนเดียว จึงเป็นรากที่ต้องการ เช่น

$$\begin{aligned}
 \text{รากกำลังที่สองของ } 36 &= \underline{2 \times 2 \times 3 \times 3} \text{ (สองตัวเหมือนกันชักออกไปหนึ่งตัว)} \\
 &= 2 \times 3 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8.1 การหารากด้วยวิธีแยกตัวประกอบ (รากกำลังที่ 2)

จงหารากกำลังที่สองของ 225

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } 225 &= 3 \times 75 \\
 &= 3 \times 3 \times 25 \\
 &= \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5} \\
 &= 3 \times 5 \\
 &= 15
 \end{aligned}$$

1.2 การหารากอย่างวิธีตั้งหาร - หารากของเลขจำนวนมาก จะหาอย่างวิธีแยกตัวประกอบตามที่เราเรียนมาแล้วไม่สะดวก ใช้หาอย่างวิธีตั้งหารได้ผลเร็วกว่า แต่ต้องรู้ว่าเมื่อหารากออกแล้วจะได้เลขผลลัพธ์หลัก ขอให้สังเกตเลขดังนี้

$$\begin{array}{llll}
 1^2 & = & 1 & \leftarrow \text{เพราะฉะนั้น} & \sqrt{1} & = & 1 \\
 10^2 & = & 100 & \leftarrow \text{เพราะฉะนั้น} & \sqrt{100} & = & 10 \\
 100^2 & = & 10,000 & \text{เพราะฉะนั้น} & \sqrt{10,000} & = & 100 \\
 1,000^2 & = & 1,000,000 & \text{เพราะฉะนั้น} & \sqrt{1,000,000} & = & 1,000
 \end{array}$$

ตามตัวเลขข้างบนนี้ จะเห็นได้ว่า รากกำลังที่สอง ของจำนวนเลขที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 100 ได้ผลลัพธ์ออกมา 1 ตัว หรือ 1 หลัก รากกำลังที่สอง ของจำนวนเลขที่อยู่ระหว่าง 1,000 และ 10,000 ได้ผลลัพธ์ 2 ตัว หรือ 2 หลัก

โดยเหตุนี้จึงเห็นได้ชัดว่า ถ้าตัวตั้งมีเลข 2 หลัก ต้องได้ผลลัพธ์ 1 หลัก ถ้าตัวตั้งมีขึ้นอีก 1 หลัก ก็ได้ผลลัพธ์เพิ่มขึ้นอีก 1 หลัก เช่นเดียวกัน ตามปกติใช้วิธีนับจำนวนเลข ตัวตั้งจากหลักหน่วยไปทางซ้ายมือ ถ้านับจำนวนเลขได้ 2 หลัก เมื่อถอดหารากจะได้ 1 หลัก หากจำนวนเลขเพิ่มอีก 1 หลัก ก็ได้ผลลัพธ์เพิ่มขึ้นอีก 1 หลัก เป็น 3 หลัก เพื่อเป็นการป้องกันการหลงลืม มักใช้วิธีขีดหรือจุดไว้บนจำนวนเลขตัวตั้งเป็นสำคัญ เช่น 144, 1444, 56644 จะเขียนเป็น $\overline{144}$, $\overline{1444}$ และ $\overline{56644}$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 8.2 การหารากอย่างวิธีตั้งหาร (รากกำลังที่ 2)

จงหารากกำลังที่สองของ 1444

$$\begin{array}{r}
 \text{วิธีทำ} \quad 3 \quad \overline{\begin{array}{r} 3 \quad 8 \\ 14 \quad 44 \\ 9 \end{array}} \\
 68 \quad \overline{\begin{array}{r} 544 \\ 544 \end{array}}
 \end{array}$$

ผลลัพธ์ได้ 38

คำอธิบาย

1.2.1 นับตัวเลขจากขวามือไปทางซ้าย 2 หลัก แล้วขีดไว้ 1 แห่งทำอย่างนี้ไปเรื่อย ๆ จนหมด เรียกว่า จัดหมู่

1.2.2 ขีดเส้นโครงเหมือนหารยาว

1.2.3 หาตัวเลขที่คูณกับตัวของมันเองไม่ให้เกินหมู่แรก เช่น หมู่แรกคือ 15 คงได้ 3 กับ 3 ใส่ผลลัพธ์ไว้ด้านบนและด้านตัวหาร ทำเหมือนวิธีตั้งหารแล้วลบกันเหลือ 5

1.2.4 ชักเลขหมู่ต่อไปมาทั้งหมู่คือ 44

1.2.5 เอา 2 คูณผลลัพธ์ตัวแรกได้ 6 เอามาใส่ไว้เป็นตัวหาร

1.2.6 หาตัวเลขอีกตัวหนึ่งใส่ในผลลัพธ์ และใส่ต่อจากตัวหารตัวแรก ซึ่งเมื่อเอาตัวผลลัพธ์มาคูณแล้วต้องได้ไม่เกินตัวตั้งใหม่ ในที่นี้เอา 8 คูณ 68 จะได้ 544 ลบกันแล้ว ไม่มีเศษ แสดงว่าลงตัว

1.2.7 อ่านผลลัพธ์

1.2.8 หากยังเหลือเศษ ขึ้นต่อไปต้องเป็นทศนิยมคือใส่จุดที่ผลลัพธ์ใส่ 00 ที่ตัวตั้งและเวลาชักเลขลงมาต้องชักศูนย์มาที่ละคู่ และทำอย่างวิธีที่กล่าวมาแล้ว ไปจนได้ตำแหน่งทศนิยมที่ต้องการ

1.3 การหารากของทศนิยม – คล้ายคลึงกับเลขจำนวนเต็ม แต่แตกต่างกันไปบ้าง กล่าวคือ

1.3.1 การหารากของจำนวนเต็ม นับ 2 หลักได้ผลลัพธ์ 1 หลัก โดยนับจากหลักหน่วย ที่ละ 2 หลัก ไปทางซ้ายมือ แต่ทศนิยมกับ 2 หลัก ได้ผลลัพธ์ 1 หลัก นับจากทศนิยมตำแหน่งแรกไปทางขวามือ เช่น 1.52, 27.05 เป็นต้น

1.3.2 ถ้าทศนิยมตำแหน่งที่ให้เติม 0 เข้าจะเพิ่มเท่าใดก็ได้ เพราะค่าไม่เปลี่ยน เช่น $1\overline{52}$ $27\overline{05}$ $00\overline{00}$ เป็นต้น แต่ถ้าเป็นทศนิยมไม่รู้จบ แทนที่จะเพิ่ม 0 ก็ให้เติมตัวเลขที่ไม่รู้จบแทน เช่น $152,27\overline{1}$ ให้เพิ่มเป็น $152,27\overline{7777}\dots$ เป็นต้น ทำเช่นนี้ตลอดไปจนกว่าจะได้ผลลัพธ์ครบจำนวนตามตำแหน่งทศนิยมตามต้องการ

1.3.3 การหารากที่มีเลขจำนวนเต็มและทศนิยม ให้หารากของเลขจำนวนเต็มก่อน เมื่อหารากไปถึงจุดทศนิยมให้เติมจุดทศนิยมเข้าที่ผลลัพธ์ ชักตำแหน่งทศนิยมมาเป็นตัวตั้งหาร ที่ละ 2 ตำแหน่ง แล้วจึงจัดการ หารากต่อไป เมื่อหารากไม่ลงตัว ก็เพิ่มศูนย์หรือตัวไม่รู้จบเข้าที่ตัวตั้ง และหารากต่อไปจนกว่าจะได้ผลลัพธ์ ครบตำแหน่งทศนิยมตามที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 8.3 การหารากของทศนิยม (รากกำลังที่ 2)

จงหารากกำลังที่สอง 0.0529

วิธีทำ

	0.	2	3	
	0.	<u>05</u>	<u>29</u>	
		4		
43		1.	29	
		1.	29	

ผลลัพธ์ที่ได้ 0.23

ตัวอย่างที่ 8.4 การหารากของทศนิยม (รากกำลังที่ 2)

จงหารากกำลังที่สองของ 152.275

	1	2	3	4
1	152		27	56
	1			
22	52			
	44			
263	8		27	
	7		24	
2464			98	56
			98	56

ผลลัพธ์ได้ 12.34

1.4 การหารากของเศษส่วน หารากทั้งตัวเลขและตัวส่วน เมื่อหารากได้ลงตัวได้ผลลัพธ์เป็นเลขเศษส่วน

เมื่อเป็นเศษส่วนจำนวนคละ ให้ทำเป็นเศษเกินแล้ว จึงหารากทั้งตัวเศษและตัวส่วน ครั้นแล้วจะทำให้เป็นเศษส่วนจำนวนคละอีก

ถ้าตัวส่วนเป็นเลขจำนวนน้อย ให้หาตัวเลขมาคูณทั้งเศษและตัวส่วน เพื่อให้หารากตัวส่วนได้ลงตัว ส่วนเศษที่หาไม่ลงตัว ให้หาอย่างหารากของทศนิยมตามที่กล่าวมาแล้ว ครั้นแล้ว จึงเอาตัวส่วนซึ่งเป็นจำนวนเต็มทีไปหาร ได้ผลลัพธ์เป็นทศนิยม

ถ้าเศษส่วนเป็นเลขจำนวนมาก ให้เอาตัวส่วนหารตัวเศษ ได้ผลลัพธ์เป็นทศนิยมก่อน แล้วจึงหารากของทศนิยมต่อไป

$$\text{เช่น } \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{1\frac{7}{7}} = \sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{2} = 1.414$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{2.4494}{3} = 0.8164$$

$$\sqrt{4\frac{259}{372}} = \sqrt{4.696236559....} = 2.16708$$

2. การหารากกำลังที่สาม รากกำลังที่สามเรียกภาษาอังกฤษว่า Cube root ซึ่งหมายความว่า เมื่อหารากคุณตัวมันเอง 3 ครั้ง จะได้เท่ากับจำนวนเดิม เช่น รากกำลังที่สามของ 27 คือ 3 เพราะ $3 \times 3 \times 3 = 27$ หรือเขียนได้ง่ายๆ ดังนี้ $3^3 = 27$ ฉะนั้น $\sqrt[3]{27} = 3$

2.1 การหารากด้วยวิธีแยกตัวประกอบ การหารากกำลังที่สามนั้นหาได้ยากมาก ประกอบทั้งที่มีใช้น้อย ถ้าเป็นตัวเลขจำนวนน้อย ใช้วิธีหาด้วยวิธีแยกตัวประกอบ คือ แยกจำนวนเลขออกเป็นตัวประกอบหลายตัว ถ้าเหมือนหรือซ้ำกัน 3 ตัว ให้ยกมาเป็นผลลัพธ์ 1 ตัว

ถ้าเป็นเลขเศษส่วน ให้ใช้วิธีหารากของตัวเศษและหารากของตัวส่วนได้รากทั้งหมดเสียเป็นเศษส่วน และถ้าเป็นเศษส่วนจำนวนคละ ให้ทำเป็นเศษส่วนเกินก่อนแล้วจึงหาราก

ตัวอย่างที่ 8.5 การหารากด้วยวิธีแยกประกอบ (รากกำลังที่ 3)

จงหารากกำลังที่สาม ของ 125

วิธีทำ

$$125 = 5 \times 5 \times 5$$

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} = 5$$

2.2 การหารากด้วยวิธีตั้งหาร การที่จะคิดหารากกำลังที่สามของจำนวนเลขได้ง่าย ควรสังเกตและจดจำเลขต่อไปนี้ก่อน

0^3	=	0		6^3	=	216
1^3	=	1		7^3	=	343
2^3	=	8		8^3	=	512
3^3	=	27		9^3	=	729
4^3	=	64		10^3	=	1,000
5^3	=	125				

ดังนั้นเลขจำนวนใดที่เลขตัวท้ายเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ย่อมหารากได้เลขตัวท้ายเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ตามลำดับ

สำหรับหลักของผลลัพธ์มักจะได้ผลคือ เลขที่อยู่ระหว่าง 1 - 1,000 หารากเพียง 1 หลัก ระหว่าง 1,000 - 1,000,000 จะได้ 2 หลัก และต่อๆ ไปก็ได้ผลว่าจำนวนเลขตัวตั้ง 3 หลัก หาราก 1 หลัก เสมอไป จงสังเกตต่อไปนี้

1^3	=	1		$\sqrt[3]{1}$	=	1
10^3	=	1,000		$\sqrt[3]{1,000}$	=	10
100^3	=	1,000,000		$\sqrt[3]{1,000,000}$	=	100

ถ้าจำนวนเลขตัวตั้งเป็นเลขทศนิยม ให้คิดหาหลักของจำนวนเต็มก่อนแล้ว จึงหาหลักของตัวเลขที่เป็นทศนิยม และคิดหารากทั้งหมดพร้อมกัน

ตัวอย่างที่ 8.6 การหารากด้วยวิธีตั้งหาร (รากกำลังที่ 3)

จงหารากกำลังที่สามของ 314432

วิธีทำ จัดหมู่ได้ 2 ชุด ดังนี้ 314 432

ตัวหาร	60^3	314 432	60 + 8
		216 000	
$3 \times (60)^2$	= 10,800	98 432	
	+		
$3 \times 60 \times 8$	= 1440		
	+		
$(8)^2$	= <u>64</u>		
	<u>= 12,304</u>	98 432	(เกิดจาก $12,304 \times 8 = 98,432$)

ผลลัพธ์ คือ $60 + 8 = 68$

หรือ อีกวิธีหนึ่ง

300×6^2	=	10,800
	+	
$30 \times 6 \times 8$	=	1,440
	+	
8^2	=	<u>64</u>
(ตัวหาร)		<u>12,304</u>

คำอธิบาย ตัวตั้งมีเลข 6 หลัก จัดชุดเลข 3 ตัวเป็นหนึ่งหมู่ โดยนับจากหลักหน่วยไปทางซ้ายมือ เห็นได้ชัดว่าต้องได้เป็นตัวเลข 2 ชุด

ผลลัพธ์ตัวแรกต้องได้ 60 เพราะ $(60)^3 = 216,000$ ให้เอา $(60)^2$ ไว้ที่ตัวหารและ 60 ไว้ทางผลลัพธ์ แล้วเอา 60 ไปคูณ จะได้ 216,000 ลบออกจากตัวตั้งเดิม คงเหลือ 98,432 ซึ่งถือเป็นตัวตั้งใหม่

การหาผลลัพธ์ตัวที่สอง เอา 3 มาคูณ $(60)^2$ ได้ 10,800 เอาไปหาร 98,432 ต้องได้ผลลัพธ์ประมาณ 8 จึงเอามาเป็นผลลัพธ์ตัวที่สอง เอา 3 มาคูณ (60×8) อีกได้ 1,440 และเอากำลังสองของผลลัพธ์ตัวที่สอง คือ $(8)^2 = 64$ มารวมด้วย ได้ตัวหารทั้งหมดเป็น 12,304 เอา 8 มาคูณได้ 98,432 ลงตัวพอดี
