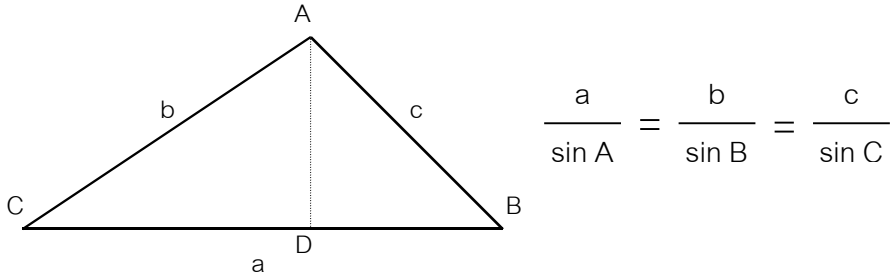


บทที่ 6 ตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมทั่วไป

6.1 สูตรที่เกี่ยวข้องระหว่างด้าน และมุมของสามเหลี่ยม

ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ ก็ตาม (ซึ่งไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก) ด้านจะสัมพันธ์กับมุมซึ่งอยู่ตรงข้ามกับด้านนั้นๆ เช่น ในรูปสามเหลี่ยม ABC ข้างล่างนี้ จะได้สูตร



6.2 การหาด้าน หรือมุมของสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยมย่อมมีด้าน 3 ด้าน และมุม 1 มุม รวมกันเป็น 2 ส่วนด้วยกัน ฉะนั้นในการกำหนดส่วนรูปสามเหลี่ยมบางส่วนไว้แล้วต้องการทราบส่วนต่างๆ ที่เหลือจะต้องกำหนดให้ 3 ส่วนเป็นอย่างน้อย และการที่จะใช้สูตรในข้อ 6.1 ข้างบน จะต้องทราบข้อมูล ในลักษณะดังต่อไปนี้

6.2.1) ด้าน 2 ด้าน กับ 1 มุม ตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่งที่กำหนดให้ เช่น ด้าน a, ด้าน b และมุม A เป็นต้น

6.2.2) 1 ด้าน กับ 2 มุม

ตัวอย่างที่ 6.1 กำหนดให้ $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, มุม $A = 30^\circ$ จงหาส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ

(1) หามุม B จากสูตร
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

แทนค่าได้
$$\frac{1}{\sin 30} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}$$
$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}$$

$$\therefore \sin B = (\sqrt{3}) / 2 \quad \text{นั่นคือ} \quad \text{มุม } B = 60^\circ \text{ หรือ } 120^\circ$$

(2) หามุม C
$$\text{มุม } C = 180^\circ - \text{มุม } A - \text{มุม } B$$
$$= 180 - 30 - 60 = 90^\circ \text{ หรือ}$$

$$\text{มุม } C = 180 - 30 - 120 = 30^\circ$$

(3) หาด้าน c จากสูตร $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

แทนค่าได้ $\frac{1}{\sin 30} = \frac{c}{\sin 90}$ หรือ $\frac{1}{\sin 30} = \frac{c}{\sin 30}$

$\therefore c = \sin 90 / \sin 30 = 1 / (1/2) = 2$ หรือ $c = \sin 30 / \sin 30 = 1$

(4) สรุปได้ว่า สามเหลี่ยมที่ได้ อาจเป็นมุมฉาก โดย

$a = 1, b = \sqrt{3}, c = 2$ มุม $A = 30^\circ$ มุม $B = 60^\circ$ มุม $C = 90^\circ$ หรือ

$a = 1, b = 3, c = 1$ มุม $A = 30^\circ$ มุม $B = 120^\circ$ มุม $C = 30^\circ$

ตัวอย่างที่ 6.2 กำหนด $A = 45^\circ$, $B = 105^\circ$, และ $c = 2$ จงหาส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ

(1) หามุม C มุม $A + \text{มุม } B + \text{มุม } C = 180^\circ$

$45 + 105 + \text{มุม } C = 180$

$\text{มุม } C = 180 - 45 - 105 = 30^\circ$

(2) หา ด้าน b จากสูตร $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$b = [c (\sin B)] / (\sin C)$

$= [2 (\sin 105)] / (\sin 30)$

$= (2 \times 0.9659) / 0.5 = 3.864$

(3) หาด้าน a $a = [b (\sin A)] / (\sin B)$

$= [3.864 (\sin 45)] / (\sin 105)$

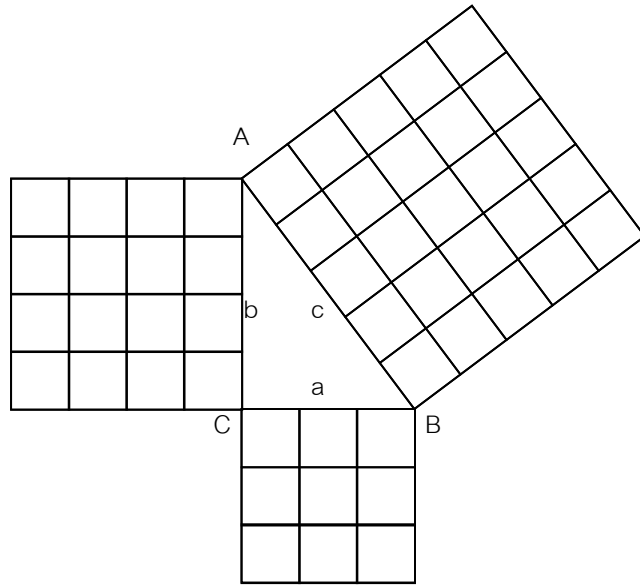
$= (3.864 \times 0.707) / 0.9659 = 2.804$

6.3 ความสัมพันธ์ของพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส บนด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

6.3.1) สามเหลี่ยมมุมฉาก

สามเหลี่ยมมุมฉาก คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมฉากหนึ่งมุม ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉากเรียกว่า “ด้านตรงข้ามมุมฉาก”

6.3.2) สูตรที่เกี่ยวกับพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสของสามเหลี่ยมมุมฉาก



ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมุม C เป็นมุมฉาก เราจะเห็นได้ว่า ถ้าเราแบ่งหน่วยวัดความยาวบนด้านต่างๆ ให้เป็นหน่วยเดียวกัน จะเห็นได้ว่า พื้นที่จัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก จะเท่ากับผลบวกของพื้นที่จัตุรัสบนอีก 2 ด้านรวมกัน

จากทฤษฎีของเรขาคณิตนี้ จะเขียนสูตรได้ดังนี้

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

ตัวอย่างที่ 6.3 สามเหลี่ยมมุมฉาก ฐานยาว 10 ซม. ด้านตั้งยาว 24 ซม. ต้องการทราบว่าด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่าไร

วิธีทำ ให้ $a = 10$ ซม. , $b = 24$ ซม.

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร } c^2 &= a^2 + b^2 \\ &= (24)^2 + (10)^2 &= 676 \text{ ซม.} \\ c &= \sqrt{676} &= 26 \text{ ซม.} \end{aligned}$$