

บทที่ 5 ตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉาก

5.1 คำจำกัดความ

5.1.1) ตรีโกณมิติ

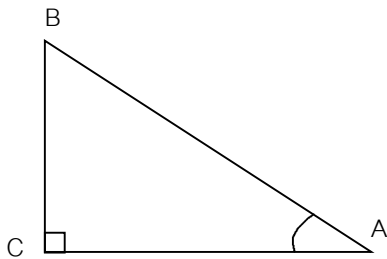
คำว่า “ตรี” แปลว่า สาม, โณน แปลว่า มุมหรือเหลี่ยม จะเห็นได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่เคยเรียนกันมาแล้ว คือรูปที่ล้อมรอบไปด้วยเส้นตรง 3 เส้น ซึ่งเรียกว่า ด้าน และมีมุม 3 มุม ส่วนคำว่า มิติ แปลว่า การวัด ฉะนั้น ตรีโกณมิติ จึงหมายความว่า วิชาที่ว่าด้วยการวัด ส่วนสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งเราจะศึกษาเฉพาะในบทเรียนนี้คือ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

5.1.2) อัตราส่วน

คือ การเปรียบเทียบของสองสิ่งที่เป็นชนิดเดียวกัน ว่ามีส่วนสัมพันธ์กันอย่างไร เช่น เปรียบเทียบระยะยาว 3 เมตร กับระยะ 7 เมตร เขียนเป็นวิธีเลขได้ว่า $\frac{3}{7}$ หรือ ซึ่งหมายความว่า 3หารด้วย 7 นั่นเอง

5.2 ด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากย่อมมีด้านสามด้าน มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก และมีมุมเล็กอีกมุมหนึ่งเป็นมุมสำคัญที่ต้องการหาค่าของอัตราส่วน ซึ่งเราจะเรียกเสียใหม่ตามทางวิชาตรีโกณมิติได้ดังนี้



สมมุติ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก และถือเอามุม A เป็นมุมสำคัญที่จะต้องหาค่าของอัตราส่วนเราจะเรียกด้าน 3 ด้านของรูปสามเหลี่ยมใหม่นี้

AB เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก (ฉาก)

BC เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม (ข้าม)

AC เรียกว่า ด้านประชิดมุม (ชิด)

5.3 อัตราส่วนตรีโกณ

เมื่อเรียกชื่อด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้องแล้ว เอาด้านทั้งสามมาเปรียบเทียบกับ
เกิดเป็นอัตราส่วนระหว่างด้านทั้งสามขึ้น โดยถือเอาถ้ามุม A ตามข้อ 3 เป็นหลัก

5.3.1) อัตราส่วน	$\frac{BC}{AB}$	=	$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}$	=	$\sin A$
5.3.2) อัตราส่วน	$\frac{AC}{AB}$	=	$\frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}$	=	$\cos A$
5.3.3) อัตราส่วน	$\frac{BC}{AC}$	=	$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านประชิดมุม A}}$	=	$\tan A$
5.3.4) อัตราส่วน	$\frac{AB}{BC}$	=	$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}$	=	$\operatorname{cosec} A$
5.3.5) อัตราส่วน	$\frac{AB}{AC}$	=	$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม A}}$	=	$\operatorname{sec} A$
5.3.6) อัตราส่วน	$\frac{AC}{BC}$	=	$\frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}$	=	$\cot A$

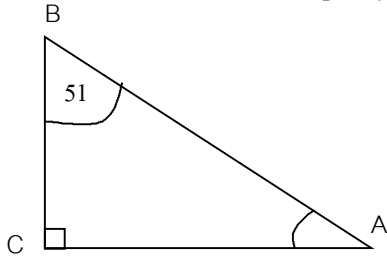
อัตราส่วนตามข้อ 5.1.4.1, 5.1.4.2, 5.1.4.3 เป็นอัตราส่วนตรงและถือเป็นอัตราส่วนหลักตามข้อ
5.1.4.4, 5.1.4.5, 5.1.4.6 เป็นอัตราส่วนกลับ คือตรงกันข้ามกับอัตราส่วนตรงนั้น คือเป็นอัตราส่วนกลับ
ของ 5.1.4.1, 5.1.4.2, 5.1.4.3, ตามลำดับ

5.4 คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

แบ่งออกได้ 2 อย่าง คือ

5.4.1) มุมของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตามที่เราทราบมาจากหลักวิชาเรขาคณิตแล้วว่า มุมภายในของสามเหลี่ยมรวมกันได้เท่ากับ 180 องศา ฉะนั้นในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เนื่องจากมีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก (90 องศา) ฉะนั้นมุมที่เหลือ 2 มุม ย่อมรวมกันได้ 90 องศา ซึ่งเมื่อรู้ค่ามุมหนึ่ง อีกมุมหนึ่งย่อมหาได้โดยง่าย เช่น



$\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็นมุมฉาก

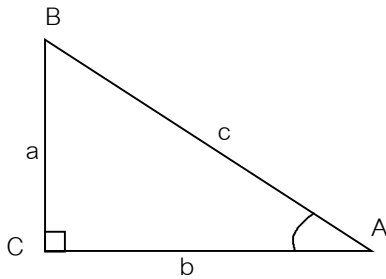
ฉะนั้น มุม A + มุม B = 90°

แต่ถ้าเราทราบว่าค่าของ มุม B = 51°

ฉะนั้นแล้วเราก็หาค่าของมุม A ได้ทันทีคือ $90^\circ - 41^\circ = 39^\circ$

5.4.2) ด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจากเราได้ทราบจากหลักเรขาคณิตแล้วว่า จัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากย่อมเท่ากับจัตุรัสบนด้านทั้งสองที่เหลือรวมกัน เช่น



$\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็นมุมฉาก

ฉะนั้น $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$ หรือ $c^2 = a^2 + b^2$

จากสมการนี้เราจะหาค่าได้อีกต่อไปคือ

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

โดยเหตุนี้เอง เมื่อรู้ความยาวของด้านทั้งสองด้านแล้ว ก็สามารถที่จะหาความยาวของด้านที่สามได้

5.5 ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมบางมุม

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมบางมุม มีค่าเป็น “จำนวน” เลขลงตัว หรือมีค่าเป็นจำนวนที่ควรจะต้องจดจำเอาไว้ใช้ได้ทันที ได้แก่มุม $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$

ตารางที่ 5.1 ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมบางมุม

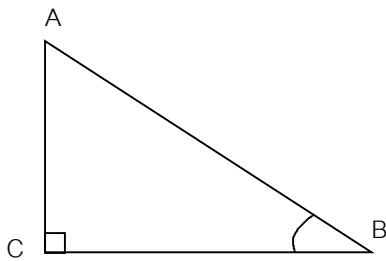
มุม	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	ไม่มี	0	ไม่มี	0
cosec	ไม่มี	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	ไม่มี	-1	ไม่มี
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ไม่มี	-1	ไม่มี	1
cot	ไม่มี	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	ไม่มี	0	ไม่มี

5.6 มุมเงย และมุมก้ม

การวัดระยะทางสูงที่เกี่ยวกับมุม จะต้องทำความเข้าใจของเรื่อง 2 มุม เสียก่อนดังนี้

5.6.1) มุมเงย (Angle of Elevation)

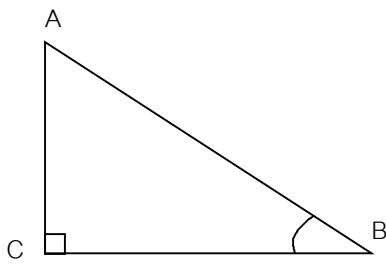
คือ มุมที่มองจากพื้นล่างไปยังสูง เช่น



AC เป็นเส้นตรงตั้งฉากกับพื้นดิน BC เมื่อเราอยู่ที่จุด B มุ่งไปยังจุดยอด A ของเส้นตรงจะเกิดเป็นมุม ABC ขึ้น มุมนี้เรียกว่า มุมยกขึ้น ขอให้สังเกตว่ามุมนี้เกิดจากการมองไปเหนือแนวระดับ บางแห่งเรียกว่า มุมเงย ก็ได้ เป็นมุมที่ทำกับเส้นระดับ สายตาและหมุนทวนเข็มนาฬิกา

5.6.1) มุมก้ม (Angle of Depression)

คือ มุมที่มองจากที่สูงมุ่งลงยังพื้นล่าง เช่น



A เป็นจุดในทะเล หรือที่ท้องทุ่งเมื่อมองจากแนวระดับก่อนแล้ว มองลงตามเข็มนาฬิกาไปยังจุด B จะเกิดมุม DAB ขึ้น เรียกว่า มุมก้ม มุมที่ทำกับเส้นระดับสายตา และหมุนตามเข็มนาฬิกา เมื่อเรามองจากที่สูงพุ่งดิ่งลงไปที่เส้นแนวนอนเป็นมุมฉากกับพื้นล่าง เช่น A -- C ระยะ AC เรียกว่าส่วนสูง (Altitude)

5.7 การทำโจทย์เกี่ยวกับระยะทาง และความสูง

โดยใช้วิธีอัตราส่วนของมุมบางมุม อัตราส่วนของมุมบางมุม คือ 30° 45° 60° นั้นต้องถือเป็นสูตร และจำไว้ให้ดี เพื่อจะได้นำเอาสูตรที่ได้จากอัตราส่วนเหล่านี้ไปหาระยะทางและความสูงตามที่โจทย์ต้องการได้ ซึ่งค่าของ $\sqrt{2}$ จะเท่ากับ 1.414 และค่าของ $\sqrt{3}$ เท่ากับ 1.732 (ให้ใช้ค่าโดยประมาณตามนี้)